

Surreale Zahlen*

Stephan Wacker

7. September 2020

Diese Arbeit ist inspiriert von Donald Knuths „kleiner mathematischen Novelle“ *Surreal Numbers* und folgt im Wesentlichen der Reihenfolge, in der das Thema dort entwickelt wird. Auch die Regeln, die bei Knuth *theorems* heißen, sind bei mir mit den gleichen Ziffern „T1“, „T2“, etc. nummeriert. Die Beweise habe ich selbst erarbeitet, gelegentlich natürlich erst nach ausführlichem Studium von Knuths Ausführungen. Manche Abschnitte, wie zum Beispiel *Eine Formel für alles*, habe ich so nicht bei Knuth gefunden, sondern aus eigenem Ansporn entwickelt. Auf eine Unterscheidung zwischen $x \equiv z$ für „ähnliche“ oder „äquivalente“ und $x = y$ für „gleiche“ oder „identische“ Zahlen verzichte ich, da auch die ähnlichen surrealen Zahlen letztlich denselben Wert haben – vielleicht ist das streng mathematisch zu beanstanden, dann sei es so.

An Notationen habe ich zwei verschiedene gefunden: Knuth verwendet runde Klammern für die surrealen Zahlen und umgibt die Mengen darin mit den üblichen geschweiften Klammern; $(\{a, b\}, \{c, d\})$. Andere Autoren und die unten zitierte Wikipedia Seite lassen die Mengenklammern weg und umgeben die surrealen Zahlen mit geschweiften Klammern: $\{a, b \mid c, d\}$. Ich mache es mir noch einfacher: keine Mengenklammern und runde Klammern für die surrealen Zahlen: $(a, b \mid c, d)$.

* https://de.wikipedia.org/wiki/Surreale_Zahl

John Conways Surreale Zahlen

Definition (Wohlgeformtheit). Eine surreale Zahl x (im Folgenden einfach „Zahl“ genannt) besteht aus zwei Mengen von bereits zuvor erzeugten Zahlen X_L und X_R mit der Eigenschaft, dass kein Element der Menge X_L größer oder gleich einem Element der Menge X_R sein darf.

$$x = (X_L \mid X_R) \quad \text{mit} \quad X_L \not\geq X_R. \quad (\text{D1})$$

X_L heißt die *linke Menge* und X_R die *rechte Menge* von x , und die Relation $\not\geq$ zwischen den beiden Mengen steht kurz für $x_L \not\geq x_R$ für alle Paare $x_L \in X_L, x_R \in X_R$.

Alle surrealen Zahlen entstehen sukzessive aus dieser fundamentalen Definition, wobei zu Beginn, da noch keine anderen Zahlen existieren, die einzig zulässige Zahlenmenge die leere Menge ist. Im ersten Schritt entsteht also eine Zahl $(\emptyset \mid \emptyset)$, in der die linke und rechte Menge leer sind. Wenn es nicht unbedingt nötig ist, werden wir das Symbol $\emptyset$ weglassen und kürzer $(\mid)$ schreiben.

Wichtig festzuhalten ist, dass dies zunächst eine völlig abstrakte Definition ist. Selbst die einfachsten Rechenregeln dürfen keinesfalls vorausgesetzt werden, sondern müssen von Grund auf neu definiert oder bewiesen werden.

Drei sehr einfache Zahlen

Später werden wir die surrealen Zahlen auch mit den üblichen Zahlen identifizieren, aber vorläufig verwenden wir lieber eine mehr bildhafte, „primitive“ Symbolik. Schreiben wir also $\langle \cdot \rangle$ für $(\mid)$ und führen dafür das Symbol $\bullet$ ein,

$$\bullet := \langle \cdot \rangle, \quad (1)$$

so kann man im zweiten Schritt drei neue Entitäten

$$\langle \bullet : \rangle, \quad \langle : \bullet \rangle \quad \text{und} \quad \langle \bullet : \bullet \rangle \quad (2)$$

bilden. (Der Begriff „Entität“ drückt aus, dass wir einen Ausdruck der Form $(X_L \mid X_R)$ nicht automatisch „Zahl“ nennen dürfen, solange wir nicht sicher sein können, dass er die Bedingung (D1) erfüllt.)

Also machen wir das und prüfen, ob diese Entitäten der ersten und zweiten Generation die Eigenschaft (D1) erfüllen, also zurecht als „wohlgeformte Zahlen“ bezeichnet werden dürfen. Für $\langle : \rangle$ ist die Sache einfach, da X_L und X_R leer sind, also auch kein Paar x_L, x_R die Regel $x_L \not\geq x_R$ verletzen könnte. Und auch in $\langle \bullet : \rangle$ und $\langle : \bullet \rangle$ ist jeweils eine der beiden Mengen leer, so dass es wieder keinen Widerspruch geben kann.

Die letzte Entität $\langle \bullet : \bullet \rangle$ in (2) ist aber nicht wohlgeformt, da identische Zahlen auch „gleich“ im Sinn der „größer oder gleich“ Relation $\geq$ sein sollten.

$$\bullet = \bullet \quad \implies \quad \langle \bullet : \bullet \rangle \text{ ist keine Zahl.} \quad (3)$$

Relationen

Definition (Kleiner gleich). Bevor wir weitere Zahlen erzeugen können, brauchen wir jetzt endlich eine formelle Definition der $\leq$ und $\geq$ Relationen für surreale Zahlen: Wir nennen eine Zahl x kleiner oder gleich einer zweiten Zahl y , wenn keine Zahl aus ihrer linken Menge größer oder gleich y ist und wenn keine Zahl aus der rechten Menge von y kleiner oder gleich x ist.

$$x = (X_L \mid X_R) \leq (Y_L \mid Y_R) = y \iff X_L \not\geq y \quad \text{und} \quad x \not\geq Y_R \quad (\text{D2})$$

Dabei sind die Schreibweisen $x \leq y$ und $y \geq x$ bzw. $x \not\geq y$ und $y \not\geq x$ wie üblich gleichbedeutend, und $X_L \not\geq y$ steht abkürzend für $x_L \not\geq y$, für alle $x_L \in X_L$.

Ist das eine vernünftige Definition? Damit Schlüsse wie der in (3) wirklich korrekt sind, sollten wir zum Beispiel auch streng formell beweisen können, dass für alle Zahlen x, y gilt

$$x \leq x \quad \text{und} \quad (4)$$

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x. \quad (5)$$

Selbst ein Beweis von (4) ist keineswegs trivial, da wir dafür per (D2) die umfangreicheren Relationen $X_L \not\leq x$ und $X_R \not\leq x$ beweisen müssen, wozu es auch in (D1) keine Aussage gibt – dort werden ja nur Beziehungen zwischen X_L und X_R gefordert.

Relationen zwischen den einfachen Zahlen

Wenigstens für unsere „kleinen“ Zahlen ist die Sache einigermaßen einfach. In der $\bullet$ sind die linke und rechte Menge beide leer, so dass wir keine weiteren Relationen zu prüfen haben, um festzustellen, dass

$$\bullet \leq \bullet. \quad (6)$$

Für $\langle \bullet : \rangle$ ist die rechte Menge leer und die linke besteht aus einem einzigen Element $\bullet$. Der Beweis von $\langle \bullet : \rangle \leq \langle \bullet : \rangle$ verläuft also so:

$$\langle \bullet : \rangle \leq \langle \bullet : \rangle \iff \langle \bullet : \rangle \not\leq \bullet \iff \bullet \geq \bullet, \quad (7)$$

und das haben wir soeben in (6) gezeigt.

Die zweite Relation $\langle \bullet : \rangle \not\leq \bullet$ in diesem Beweis schließt übrigens schon eine der Varianten in (5) im Fall $x = \bullet$, $y = \langle \bullet : \rangle$ aus. Prüfen wir also die andere:

$$\bullet \leq \langle \bullet : \rangle \quad (8)$$

ist gemäß (D2) wahr, weil sowohl die linke Menge in $\bullet$ als auch die rechte Menge in $\langle \bullet : \rangle$ leer sind.

Dieses Verhältnis zwischen $\bullet$ und $\langle \bullet : \rangle$, dass nämlich von den beiden Relationen $x \leq y$ und $x \geq y$ nur genau eine zutrifft, rechtfertigt die Feststellung, dass die beiden Zahlen nicht gleich sind, sondern die eine echt kleiner als die andere ist, in diesem Fall also

$$\bullet < \langle \bullet : \rangle . \quad (9)$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$\langle : \bullet \rangle < \bullet . \quad (10)$$

Positive und negative Zahlen

Nachdem geklärt ist, dass diese einfachsten Zahlen wirklich verschieden sind, führen wir zwei neue Symbole

$$| := \langle \bullet : \rangle , \quad - := \langle : \bullet \rangle \quad (11)$$

ein und wiederholen damit die Aussagen (9) und (10),

$$- < \bullet , \quad \bullet < | . \quad (12)$$

Anmerkung. Solange wir nicht (5) bewiesen haben, dürfen wir auch nicht $\not\leq$ durch $<$ ersetzen!

Es bleibt noch die Frage, in welcher Beziehung $|$ und $-$ stehen. Nach der bisherigen Arbeit ist das gleich geklärt:

$$| \leq - \iff | \not\leq \bullet \text{ und } \bullet \not\leq -$$

ist beides falsch, wegen (12), aber

$$- \leq |$$

ist wahr, weil hier die zu vergleichenden linken bzw. rechten Mengen von $|$ und $-$ leer sind.

Das ist übrigens ein allgemeines Prinzip: Falls die linke Menge von x und die rechte Menge von y leer sind, und die anderen beiden Mengen die Zahl $\bullet$ enthalten, gilt

$$(\mid X_R) < \bullet < (Y_L \mid) \quad (13)$$

Es spricht jetzt alles dafür, das Symbol $\bullet$ mit der gewöhnlichen Zahl 0 zu identifizieren, sowie die surrealen Zahlen der Form $(\emptyset \mid \{0\} \cup X_R)$ als negative und solche der Form $(\{0\} \cup Y_L \mid \emptyset)$ als positive zu betrachten. Den Symbolen $\mid$ und $-$ kommt es zu, die 1 und -1 zu repräsentieren,

$$\bullet = 0 = (\mid), \quad \mid = 1 = (0 \mid), \quad - = -1 = (\mid 0). \quad (14)$$

Dass dies eine gute Wahl ist, wird sich bestätigen, wenn wir später die Regeln für Addition und Multiplikation behandeln.

Das Transitivgesetz

Für eine allgemeine Untersuchung von (4) und (5) ist es aber immer noch zu früh; zuvor wollen wir uns am Transitivgesetz

$$x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq z \quad \implies \quad x \leq z. \quad (T1)$$

versuchen. („T1“ steht für „Theorem 1“; „Regel 1“ oder „Satz 1“ wäre auch angemessen, aber wir folgen der Bezeichnung aus Donald Knuths Büchlein.) Ein direkter Beweis nur mit den Definitionen erscheint aussichtslos, da die $\leq$ Relation sich gemäß (D2) auf sich selbst stützt, angewandt auf eine der beiden Zahlen und die Elemente in der linken bzw. rechten Menge der anderen Zahl, während (D1) nur eine bestimmte Beziehung zwischen linker und rechter Menge derselben Zahl fordert. Wir hätten ohne Ende neue Zahlen zu betrachten – so geht es jedenfalls nicht!

Gehen wir es anders an, über einen Beweis per Widerspruch; und der rekursiven Definition von $\leq$ sollten wir mit vollständiger Induktion begegnen. Also: Angenommen, das Transitivgesetz würde *nicht* allgemein gelten, dann müsste es Zahlen x, y, z geben, mit

$$x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq z \quad \text{und} \quad x \not\leq z. \quad (15)$$

Die ersten beiden Relationen bedeuten laut (D2), dass

$$X_L \not\leq y \quad \text{und} \quad x \not\leq Y_R \quad \text{und} \quad Y_L \not\leq z \quad \text{und} \quad y \not\leq Z_R \quad (16)$$

während aus der dritten folgt, dass

$$X_L \geq z \quad (17)$$

oder

$$x \geq Z_R \quad (18)$$

Im ersten Fall folgt aus (17), dass es in X_L eine Zahl $x_L \geq z$ gibt, die wir in die erste Relation von (16) einsetzen können. Zusammen mit $y \leq z$ aus (15) erhalten wir

$$x_L \not\leq y \quad \text{und} \quad y \leq z \quad \text{und} \quad x_L \geq z,$$

oder, in anderer Reihenfolge,

$$y \leq z \quad \text{und} \quad z \leq x_L \quad \text{und} \quad y \not\leq x_L. \quad (19)$$

Im anderen Fall folgt aus (18), dass es ein $z_R \in Z_R$ gibt, mit

$$z_R \leq x \quad \text{und} \quad x \leq y \quad \text{und} \quad z_R \not\leq y, \quad (20)$$

so dass wir also in beiden Fällen wieder vor derselben Situation stehen wie zu Beginn in (15). Das wäre dann wohl unser Induktionsschritt – aber was ist die Induktionsvariable? Nun, der einzig erkennbare Unterschied ist, dass wir von den drei Zahlen x, y, z eine durch ein Element ihrer linken bzw. rechten Menge ersetzt haben.

Und hier kommt uns ein unscheinbares Detail in (D1) zuhulfe, nämlich dass die Zahlen in den linken und rechten Mengen „bereits zuvor erzeugt“ worden sein müssen. Das setzt offensichtlich jeder Art von Iteration, in der laufend „einfachere“, früher erzeugte Zahlen vorkommen sollen, ein natürliches Ende. Irgendwann sind alle früher erzeugten Zahlen aufgebraucht, die Mengen in (17) und (18) sind beide leer und die Ausdrücke sind beide falsch.

Generationen

Zu Beginn dieses Textes hatten wir von den Zahlen der „ersten und zweiten Generation“ gesprochen. Diese „Generationenzahl“ $G(x)$, also die Anzahl Schritte, die notwendig sind, um eine surreale Zahl x zu konstruieren, wäre somit eine geeignete Induktionsvariable:

$$G(\{x, y, z\}) := G(x) + G(y) + G(z) \quad (21)$$

verringert sich in jedem Schritt von (15) bis (19) bzw. (20) um eins, kann aber nicht negativ werden. Widerspruch!

Weitere Regeln

Schlussfolgerungen wie die in (T1) sind äußerst nützlich, da sie es ermöglichen, die Relationen zwischen Zahlen zu klären, die nicht direkt miteinander in Beziehung stehen. Wir können sicher noch einige ähnliche Regeln aufstellen.

Zum Beispiel sollte für jede Zahl $x = (X_L \mid X_R)$ gelten, dass

$$X_L \leq x \quad \text{und} \quad x \leq X_R. \quad (T2)$$

Auch hier führen wir einen Induktionsbeweis, ausgehend von $\emptyset \leq 0$ und der Voraussetzung, dass $X_L \leq x$ für alle Zahlen bis zur Generation g gilt. (Für die zweite Relation, $x \leq X_R$, geht der Beweis wieder analog.)

Sei nun x eine Zahl der Generation $g + 1$.

Ausgehend von der Annahme des Gegenteils, $X_L \not\leq x$, müsste es auch ein konkretes $x_L \in X_L$ geben, mit

$$x_L \not\leq x, \quad (22)$$

und damit laut (D2) auch $x_{LL} \in X_{LL}$, mit

$$x_{LL} \geq x \quad (23)$$

(oder $x_L \geq x_R$, was aber wegen (D1) ausgeschlossen ist). Per Induktionsvoraussetzung ist $x_{LL} \leq x_L$; zusammen mit (23) und (T1) ergibt das

$$x \leq x_{LL} \quad \text{und} \quad x_{LL} \leq x_L \quad \implies \quad x \leq x_L. \quad (24)$$

Weiter geht es mit

$$X_L \not\leq x_L \quad \text{und} \quad x \not\leq X_{LR}, \quad (25)$$

in der ersten Relation ist aber insbesondere $x_L \not\leq x_L$ enthalten, eine Aussage, die mit großer Wahrscheinlichkeit falsch ist – wenn wir endlich (4) beweisen könnten!

Versuchen wir das jetzt nochmal und geben der Gleichung einen neuen Namen, (T3), um auszudrücken, dass es sich um eine weitere Regel handelt.

$$x \leq x \quad (T3)$$

Nehmen wir wieder das Gegenteil an, dass es eine Zahl x mit

$$x \not\leq x \quad (26)$$

gäbe, dann folgt daraus

$$X_L \geq x, \quad (27)$$

mit einem in X_L enthaltenen $x_L \geq x$ (oder $x \not\leq x_R$, das wäre dann wieder der andere, analoge Zweig des Beweises). Aus $x \leq x_L$ folgt

$$X_L \not\leq x_L, \quad (28)$$

insbesondere $x_L \not\leq x_L$, womit wir schon wieder bei (26) wären, aber in einer früheren Generation. Per Induktion über $G(x)$ entsteht also erneut ein Widerspruch, so dass (T3) bewiesen ist. Somit stellt sich, wie vermutet, (25) als falsch heraus, so dass wir auch (T2) bewiesen haben.

Können wir nun auch (5) beweisen? Wir hatten geschrieben

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x.$$

Das ist gleichwertig mit

$$x \not\leq y \quad \implies \quad y \leq x, \quad (T4)$$

und beide Formeln besagen, dass letztlich alle Zahlen der Größe nach anordenbar sind.

Beginnen wir mit

$$x \not\leq y, \quad (29)$$

dann folgt daraus, dass es ein $x_L \in X_L$ mit

$$x_L \geq y \quad (30)$$

(oder analog $x \geq y_R$) gibt, zusammen mit $x_L \leq x$ aus (T2) also

$$y \leq x_L \quad \text{und} \quad x_L \leq x \quad \implies \quad y \leq x, \quad (31)$$

fertig!

Relationen vereinfachen

Damit ist auch die Einschränkung ausgeräumt, die wir in der Anmerkung nach (12) gemacht hatten. Die umständliche Schreibweise $\nless$ kann regelmäßig durch das einfachere $<$ ersetzt werden.

$$x \nless y \iff x \leq y \text{ und } x \neq y \iff x < y. \quad (32)$$

Und die Transitivität von $\leq$ überträgt sich auf $<$,

$$x \leq y \text{ und } y < z \implies x \leq z \text{ und } x \neq z \implies x < z, \quad (T5)$$

$$x < y \text{ und } y \leq z \implies x \neq z \text{ und } x \leq z \implies x < z. \quad (T6)$$

Der Fall $x = z$ ist ausgeschlossen, weil sonst die Vorbedingungen die Form $x \leq y$ und $x \nless y$ hätten.

Ausdrücke mit „und“, wie die soeben benutzten, dürfen wir in Zukunft auch ohne Gefahr von Missverständnissen verkürzen,

$$x \leq y \text{ und } y < z \iff x \leq y < z.$$

Wir können sogar die transitive Regel (T2) verschärfen. Wenn wir benutzen, dass sich $x \leq x_L$ in (28) als falsch herausgestellt hat, können wir die Gleichheit von x_L und x ausschließen und schreiben

$$X_L < x < X_R. \quad (T2')$$

Mengen reduzieren

Das Transitivgesetz (T1) erlaubt eine erhebliche Vereinfachung der linken und rechten Mengen, die eine Zahl definieren. Beim Vergleich zweier Zahlen müssen wir stets nur das größte Element der linken und das kleinste Element der rechten Menge betrachten; alle anderen Elemente haben keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Sei z. B. $X_L = \{x_L, x'_L\}$ mit $x'_L < x_L$ und wir wollen $x \leq y$ prüfen:

$$\begin{aligned} x \leq y & \iff X_L \not\geq y \text{ und } x \not\geq Y_L \iff \\ & x_L < y \text{ und } x'_L < y \text{ und } x \not\geq Y_L \end{aligned} \quad (33)$$

Aus $x'_L < x_L$ können wir schließen

$$x'_L < x_L \text{ und } x_L < y \implies x'_L < y, \quad (34)$$

also ist der Ausdruck $x'_L < y$ in (33) überflüssig. Und wenn umgekehrt $x_L \geq y$, so ist das alleine schon ausreichend, um $x \leq y$ zu widerlegen; auf die zusätzliche Bedingung $x'_L < y$ kann man auch hier verzichten.

Zwei Zahlen, die sich im Vergleich mit anderen Zahlen identisch verhalten, wollen wir als gleich (vielleicht besser „ähnlich“ oder „ununterscheidbar“) betrachten.

$$(X_L \mid X_R) = (x_L^{\max} \mid x_R^{\min}), \quad (R)$$

mit

$$x_L^{\max} := \max \{x_L \in X_L\} \quad x_R^{\min} := \min \{x_R \in X_R\} \quad (35)$$

Anmerkung. Da wir später auch unendlichen Mengen begegnen werden, sollten wir Maximum und Minimum vielleicht durch Supremum und Infimum ersetzen. – Das könnte aber die Regel (T2') verletzen, so dass wir (R) lieber auf die Fälle einschränken, in denen $x_L^{\max}$ und $x_R^{\min}$ existieren.

Für endliche Mengen gelingt der Beweis von (R) durch wiederholte Elimination von kleineren Elementen aus X_L gemäß (34) bzw. größeren Elementen aus X_R auf analoge Weise.

Die dritte Generation

An konkreten Zahlen hatten wir bisher lediglich die einfachsten drei Exemplare, $\bullet = \langle : \rangle$, $\mid = \langle \bullet : \rangle$ und $- = \langle : \bullet \rangle$ untersucht. Wie geht es

danach, in der dritten Generation, weiter? Wir erhalten, wobei wir nur wohlgeformte Zahlen betrachten und die linken und rechten Mengen bereits, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, auf maximal ein Element reduzieren,

$$\begin{array}{cccc} \langle :| \rangle & \langle :- \rangle & \langle \bullet :| \rangle & \langle - :| \rangle \\ \langle | : \rangle & \langle - : \rangle & \langle - : \bullet \rangle & \end{array} \quad (36)$$

Manche Beziehungen sind nach (T2') bereits offensichtlich, so dass wir einige Zahlen schön anordnen können

$$\langle :- \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet :| \rangle < | < \langle | : \rangle \quad (37)$$

Die übrigen neuen Zahlen, $\langle :| \rangle$, $\langle - : \rangle$ und $\langle - :| \rangle$ müssen wir noch eingehender untersuchen. $\langle :| \rangle$ ist jedenfalls kleiner als $|$ und nicht kleiner als $\bullet$,

$$\bullet \leq \langle :| \rangle < |. \quad (38)$$

Was ergibt der Vergleich mit $\langle \bullet :| \rangle$, der Zahl zwischen $\bullet$ und $|$?

$$\begin{array}{ccc} \langle \bullet :| \rangle \leq \langle :| \rangle & \iff & \bullet \not\leq \langle :| \rangle \quad \text{und} \quad \langle \bullet :| \rangle < | \\ & \iff & \langle :| \rangle \not\leq \bullet \end{array} \quad (39)$$

ist falsch, weil die linke Menge von $\langle :| \rangle$ und die rechte von $\bullet$ beide leer sind.

Da nun die letzte Gleichung in (39) falsch ist, ist ihr Gegenteil wahr, also $\langle :| \rangle \leq \bullet$, was zusammen mit (38) ergibt, dass

$$\langle :| \rangle = \bullet. \quad (40)$$

Das muss uns nicht arg überraschen, da Zahlen, deren linke und rechte Mengen „zu weit auseinander“ liegen, viele Möglichkeiten offenlassen, um die Ungleichungen in (D2) zu erfüllen.

Allgemein kann man zeigen, dass zwei Zahlen $x = (X_L | X_R)$ und $y = (Y_L | Y_R)$ gleich sind, wenn

$$Y_L < x < Y_R \quad \text{und} \quad X_L < y < Y_R. \quad (41)$$

Angewandt auf $\langle - : \rangle$ und $\langle - : | \rangle$ ergibt das, dass beide gleich $\bullet$ sind, weil man offenbar die Mengen, welche die Zahlen definieren, gegeneinander austauschen kann.

Gleiche Zahlen

Die Regel (41) ist zwar in diesen einfachen Fällen brauchbar, aber im allgemeinen Fall nicht einfach anzuwenden. Man bräuchte noch einen Weg, das richtige y zu finden, wenn man nur die linken und rechten Mengen von x gegeben hat.

Man kann aber noch etwas anderes mit den Mengen aus (41) anstellen, nämlich sie zusammenwerfen und eine neue Zahl

$$z = (X_L \cup Y_L \mid X_R \cup Y_R) \quad (42)$$

bilden, die ebenfalls die Eigenschaft hat, mit x und y gleich zu sein.

$$z \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad X_L < x \quad \text{und} \quad Y_L < x \quad \text{und} \quad z < X_R \quad (43)$$

ist wahr, weil die erste Relation unsere Regel (T2') ist, die zweite unsere Voraussetzung aus (41) und in der dritten Ungleichung X_R nur eine Teilmenge von Z_R , so dass wir uns wieder auf (T2') beziehen können.

Ganz genauso zeigt man, dass

$$x \leq z \quad \Longleftrightarrow \quad X_L < z \quad \text{und} \quad x < X_R \quad \text{und} \quad x \leq Y_R \quad (44)$$

Schreiben wir das als neue transitive Regel auf:

$$Y_L < x < Y_R \quad \Longrightarrow \quad x = (X_L \cup Y_L \mid X_R \cup Y_R) \quad (T7)$$

In welcher Generation wird die Zahl z in (42) erzeugt? Sicher nicht später als x und y , da man zum Bilden von z keine anderen Vorläuferzahlen braucht als für x und y ,

$$G(z) = \max(G(x), G(y)). \quad (45)$$

Doppelgänger erkennen

Als wir uns mit den neuen Zahlen der dritten Generation (36) beschäftigt haben, mussten wir einige Kandidaten als bereits bekannt eliminieren, weil sie sich als gleich der $\bullet$ herausstellten. Das wird auch in den späteren Generationen passieren, wobei bestimmt auch Doppelgänger von anderen Zahlen als $\bullet$ auftreten werden.

Es wäre schön, wenn man bereits vorhersagen könnte, welche Zahlen, die wir in Generation $g+1$ bilden können, neu sein werden und welche bereits bekannt.

Betrachten wir die Liste aller verschiedenen Zahlen in den ersten drei Generationen (vgl. (37)),

$$\begin{array}{c} \bullet \\ - < \bullet < | \\ \langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle \end{array}$$

dann schaut es so aus, als ob neue Zahlen nur entstehen, wenn man in die linken und rechten Mengen unmittelbar benachbarte Zahlen der jeweils vorherigen Liste steckt. (Man beachte, dass nach (R) nur das jeweils größte bzw. kleinste Element in X_L und X_R relevant sind.) Am linken und rechten Rand entsteht eine neue Zahl, indem man die bisher äußerste Zahl mit der leeren Menge kombiniert.

Dass die beschriebenen Zahlen

$$x = (x_i \mid x_{i+1}) = (\{z : z \leq x_i\} \mid \{z : z \geq x_{i+1}\}), \quad (46)$$

worin wir *alle* z aus den früheren Generationen auf die linke und rechte Menge verteilen, neu sind, folgt unmittelbar aus $X_L < x < X_R$ (T2'), da x in der Liste der vorherigen Generation einfach keinen Platz zwischen x_i und x_{i+1} hat. Am Rand muss die neue Zahl kleiner als die

bisher kleinste bzw. größer als die bisher größte sein, was sie ebenfalls aus der Vorgängergeneration ausschließt.

Es bleibt noch zu beweisen, dass alle anderen Kombinationen *keine* neuen Zahlen liefern.

1) Für die Zahl $z = (x_{i-1} \mid x_{i+1})$ würden wir beispielsweise annehmen, dass sie gleich $x = x_i$ ist, was sich sofort aus (T7) und (R) ergibt.

$$\begin{aligned} X_L \cup \{x_{i-1}\} \leq x \leq X_R \cup \{x_{i+1}\} &\implies \\ x = (X_L \cup \{x_{i-1}\} \mid X_R \cup \{x_{i+1}\}) &= (x_{i-1} \mid x_{i+1}) = z, \quad (47) \end{aligned}$$

weil sich in X_L und X_R , die ja aus einer Generation von vor x_i stammen, keine Zahlen $> x_{i-1}$ bzw. $< x_{i+1}$ befinden können.

2) Bei $z = (x_j \mid x_k)$, mit größeren Abstand zwischen x_j und x_k , gilt dasselbe Argument, wenn man für x von allen Zahlen x_i , die dazwischen liegen, diejenige aus der *frühesten* Generation nimmt. Dann kann in deren linken und rechten Mengen nämlich auch keine der Zahlen $x_{j+1}, \dots, x_{k-1}$ vorkommen.

Nochmal langsam: Sei

$$g := G(x) = \min_{j < i < k} \{G(x_i)\}. \quad (48)$$

Dann können die Mengen X_L und X_R nur Zahlen mit $G(x_L) < g$ und $G(x_R) < g$ enthalten. Dies sind insbesondere nicht die Zahlen $x_{j+1}, \dots, x_{k-1}$. Somit gilt die Schlussfolgerung (47) auch in diesem Fall, wenn man nur die Indizes geeignet austauscht.

Ist das beschriebene x möglicherweise nicht eindeutig? Angenommen es gäbe noch ein zweites x' mit der Eigenschaft (48), dann kämen wir zum Ergebnis, dass $x' = z = x$; also ist x doch eindeutig definiert.

3) Für Zahlen der Form $(\mid x_k)$ und $(x_j \mid)$, wobei x_k und x_j nicht die erste bzw. letzte Zahl in der Vorgängerliste sind, funktioniert die

Auswahl von x und die folgende Argumentation genauso wie in 2); wenn es in z kein x_j gibt, lässt man in (48) das j weg, und wenn es kein x_k gibt, eben das k .

Fassen wir das in einer weiteren Regel zusammen:

Sei x die Zahl mit minimalem $G(x)$, die
zwischen Y_L und Y_R liegt, dann gilt $x = y$. (T8)

Anmerkung. Die Aussage deckt alle drei oben behandelten Fälle ab und ist auch dann richtig, wenn y selbst die beschriebene Zahl ist.

Das kann man auch anders formulieren

In jeder Generation werden nur und genau
solche Zahlen neu gebildet, zwischen deren
linken und rechten Mengen keine bereits
bekannte Zahl existiert. (T8')

Wir können die in Regel (T8) beschriebene Zahl rasch und eindeutig bestimmen, wenn sich Y_L und Y_R gemäß (R) auf Zahlen der Form $(\dots | x)$ und $(x | \dots)$ reduzieren lassen, nämlich

$$y_L = (Y_{LL} | x) \quad \text{und} \quad y_R = (x | Y_{RR}) \quad \implies \quad x = y. \quad (\text{T8''})$$

Zunächst gilt $y_{LR} = x \implies y_L < x$, nach (T2'), und ebenso $x < y_R$, also ist x ein Kandidat für (T8), weil seine Generation ja auch kleiner ist als die von y_L und y_R . Und dann kann es zwischen y_L und x bzw. zwischen x und y_R keine Zahl z einer noch früheren Generation geben. Wir untersuchen den Fall

$$y_L < z < x \quad \implies \quad Y_{LL} < z < Y_{LR} \quad \implies \quad z = y_L,$$

Widerspruch!

Neue Generationen leicht gemacht

Im vorherigen Abschnitt haben wir viel gelernt. Wir wissen jetzt (zumindest formal, syntaktisch), welche neuen Zahlen in jeder neuen Generation entstehen werden. Und wir können auch sagen, wie viele es sind.

- Es gibt *eine* Zahl der Generation 1, nämlich •.
- In Generation 2 sind es *zwei* neue Zahlen, | und —, macht zusammen drei.
- Als nächstes gibt es *vier* neue Zahlen, womit wir auf sieben kommen.
- ...
- In der n -ten Generation gibt es 2^{n-1} neue Zahlen und die Anzahl ist $2^n - 1$.

Dafür genügt ein einfacher Induktionsbeweis.

Addieren und subtrahieren

Wir sind also jetzt in der Lage, ohne Weiteres jede Menge neue Zahlen zu produzieren, ohne irgendeine Ahnung zu haben, welchen Wert sie besitzen – nur dass die einen größer sind als die anderen und manche auch gleich.

Man könnte auch Vermutungen anstellen, z. B. dass $\langle | : \rangle = 2$ sein könnte, aber das hat wenig Sinn, weil wir es nicht überprüfen können, solange wir nicht wissen, wie wir mit den surrealen Zahlen rechnen sollen. Es bedarf also einer neuen

Definition (Addition). Um die Summe zweier Zahlen $x = (X_L | X_R)$ und $y = (Y_L | Y_R)$ zu bilden, addiere man alle Zahlen in den linken

und rechten Mengen zur jeweils anderen Zahl. Die linke Menge der Summe besteht aus den Summen, in denen eine linke Zahl vorkommt und die rechte Menge der Summe aus jenen Zahlen, in denen eine rechte Zahl vorkommt.

$$x + y = ((X_L + y) \cup (Y_L + x) \mid (X_R + y) \cup (Y_R + x)), \quad (A)$$

mit

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + y = \{x_1 + y, x_2 + y, \dots, x_n + y\}.$$

Schaut erst mal schrecklich aus, ist aber in der Anwendung gar nicht so schlimm. Versuchen wir es an einigen einfachen Beispielen

$$\bullet + \bullet = \langle : \rangle + \langle : \rangle = \langle : \rangle = \bullet \quad (49)$$

$$\bullet + | = \langle : \rangle + \langle \bullet : \rangle = \langle \bullet : \rangle = | \quad (50)$$

OK, $\bullet$ ist offenbar das neutrale Element der Addition, sprich $\bullet = 0$ (wir erinnern uns an (14)). Wesentlich ist hier zu beachten, dass $\emptyset + y = \emptyset$.

$$| + | = \langle \bullet : \rangle + \langle \bullet : \rangle = \langle \bullet + | : \rangle = \langle | : \rangle \quad (51)$$

Tatsächlich, $\langle | : \rangle = 2$, wer hätte es gedacht, und genauso errechnet man $\langle : - \rangle = -2$; dazu sollten wir aber auch definieren, was eine negative surreale Zahl sein soll.

Definition (Negative Zahlen). Die linke Menge des Negativen einer Zahl $x = (X_L \mid X_R)$ besteht aus den Negativen ihrer rechten Menge, und umgekehrt,

$$-x = (-X_R \mid -X_L), \quad (N)$$

mit

$$-\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{-x_1, -x_2, \dots, -x_n\}.$$

Definition (Subtraktion).

$$x - y = x + (-y) \quad (S)$$

ist dann nur noch Formsache.

Auch dazu ein paar Beispiele:

$$\begin{aligned} -\bullet &= -\langle : \rangle = \langle : \rangle = \bullet \\ -| &= (-\langle \bullet : \rangle) = \langle \bullet : \rangle = - \\ | - | &= | + (-|) = \langle \bullet : \rangle + \langle : \bullet \rangle = \langle - : | \rangle = \bullet \end{aligned}$$

gemäß (41).

Jetzt etwas Interessanteres – was bekommt man, wenn man zwei unbekannte Zahlen der dritten Generation addiert, z. B.

$$\langle \bullet : | \rangle + | = \langle \bullet : | \rangle + \langle \bullet : \rangle = \langle | \langle \bullet : | \rangle : | + | \rangle = \langle | : \langle | : \rangle \rangle, \quad (52)$$

was eine Zahl ist, die neu in der vierten Generation auftaucht, da $|$ und $\langle | : \rangle$ benachbart in der Liste (37) stehen.

Das nächste Beispiel,

$$\langle \bullet : | \rangle + \langle \bullet : | \rangle = \langle \langle \bullet : | \rangle : | + \langle \bullet : | \rangle \rangle = \langle \langle \bullet : | \rangle : \langle | : \langle | : \rangle \rangle \rangle, \quad (53)$$

ist eine Zahl der fünften Generation, die sich aber mittels (T8) zu $|$ reduzieren lässt, weil

$$\langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \langle | : \rangle \rangle. \quad (54)$$

Das bedeutet

$$\langle \bullet : | \rangle + \langle \bullet : | \rangle = |, \quad (55)$$

also muss $\langle \bullet : | \rangle = 1/2$ sein! Analog findet man, dass $\langle - : \bullet \rangle = -1/2$, und damit kennen wir jetzt den Wert aller Zahlen der dritten Generation,

$$\begin{aligned} \langle : - \rangle &= -2 & \langle | : \rangle &= 2 \\ - &= -1 & | &= 1 \\ \langle - : \bullet \rangle &= -1/2 & \langle \bullet : | \rangle &= 1/2 \\ \bullet &= 0 \end{aligned}$$

Langsam nehmen die surrealen Zahlen Gestalt an...

Die vierte Generation

Einer Zahl der vierten Generation, $\langle | : \langle | : \rangle \rangle$, sind wir schon in (53) begegnet, und zwar als wir

$$| + \langle \bullet : | \rangle = \langle | : \langle | : \rangle \rangle \quad (56)$$

gerechnet haben, so dass offensichtlich $\langle | : \langle | : \rangle \rangle = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ sein muss. Die anderen (positiven) neuen Zahlen liegen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 und rechts von 2.

Letztere lässt sich am einfachsten berechnen, wobei wir vermuten, dass sie den Wert 3 haben wird,

$$2 + 1 = (1 |) + (0 |) = (1 + 1, 2 + 0 |) = (2 |). \quad (57)$$

Das Schema lässt sich leicht fortsetzen,

$$n + 1 = (n - 1 |) + (0 |) = (n - 1 + 1, n + 0 |) = (n |), \quad (Z)$$

so dass in jeder Generation g die jeweils nächste natürliche Zahl $g - 1$ erzeugt wird.

Vielleicht lässt sich daraus sogar noch mehr machen. Lassen wir die Einschränkung auf natürliche Zahlen fallen, so haben wir für eine nach (R) reduzierte Zahl $x = (x_L | x_R)$

$$x + 1 = (x_L + 1, x + 0 | x_R + 1) = (x_L + 1 | x_R + 1), \quad (58)$$

falls wir auf $x + 0$ in der linken Menge verzichten können, d. h. wenn

$$\begin{aligned} x \leq x_L + 1 & \iff x_L < x_L + 1 \quad \text{und} \quad x < (x_L + 1)_R \\ & \iff x < (x_L + 1)_R. \end{aligned}$$

Fassen wir (58) als Annahme eines Induktionsbeweises auf, dann ist

$$(x_L + 1)_R = x_{LR} + 1,$$

was nun die Bedingung

$$x < x_{LR} + 1$$

ergibt. Das ist z. B. wahr für $x_L = 0$, also jede Zahl $x = (0 \mid y)$, weil dann $X_{LR} = \emptyset$. Auch für jede positive ganze Zahl sind laut (Z) sowohl X_R als auch X_{LR} leer, so dass wir nun auch noch die übrigen positiven Zahlen prüfen wollen.

Sei $x_L > 0$ und X_{LR} (noch) nicht leer, dann wenden wir (58) erneut an (was nach dem bisher gesagten zulässig ist, wenn $x_{LL} \geq 0 \iff x_L > 0$, also immer in diesem Zusammenhang) und ersetzen $x_{LR} + 1 = x_{LRR} + 1$, usw., bis irgendwann eine rechte Menge leer ist.

Die richtige Voraussetzung für (58) ist also $x_L \geq 0 \iff x > 0$. Das ergibt eine neue Regel

$$x > 0 \implies x + 1 = (X_L + 1 \mid X_R + 1), \quad (\text{T9})$$

worin auch (Z) enthalten ist.

Wenden wir das auf die positiven Zahlen der dritten Generation an, so erhalten wir alle neuen Zahlen > 1 der vierten Generation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 1 &= (0 \mid 1) + 1 = (0 + 1 \mid 1 + 1) = (1 \mid 2) = \frac{3}{2} \\ 2 + 1 &= (1 \mid) + 1 = (1 + 1 \mid) = (2 \mid) = 3 \end{aligned}$$

Die Zahlen zwischen 0 und 1 können wir über den Ansatz $x + x$ berechnen. Wie wir im Beispiel $\frac{1}{2}$ gesehen haben, wäre zu hoffen, dass $x + x$ eine bereits bekannte Zahl ist, und x eben die Hälfte davon.

Null-Nachbarn

Eine Sorte von Zahlen sollte besonders einfach zu behandeln sein, und zwar diejenigen, die mit der 0 neu gebildet werden. Die größte solche

Zahl ist die 1, danach kommt $1/2$, und die nachfolgenden haben (wenn sie positiv sind) alle die Form $x = (0 \mid x_R)$, wobei x_R wegen (T8') in der vorherigen Generation ebenfalls ein „Null-Nachbar“ gewesen sein muss.

Das Doppelte eines Null-Nachbarn berechnet sich dann per (T8) zu

$$x + x = (0 \mid x_R) + (0 \mid x_R) = (x \mid x_R + x) = x_R, \quad (59)$$

weil

$$x < x_R < x_R + x. \quad (60)$$

Aus jedem Null-Nachbarn z_g entsteht so, beginnend mit $z_2 = 1$, in der nächsten Generation der nächste Null-Nachbar z_{g+1} mit dem halben Wert,

$$z_{g+1} = (0 \mid z_g) = \frac{1}{2} z_g = \frac{1}{2^{g-1}}. \quad (\text{NN})$$

Könnte es neben x_R noch eine andere Zahl einer noch früheren Generation mit der Eigenschaft (60) geben? Nehmen wir an, y wäre so eine, also

$$x < y < x_R + x \quad \text{und} \quad G(y) < G(x_R), \quad (61)$$

dann müsste auf jeden Fall $y > x_R$ sein, da x_R die kleinste positive Zahl bis zu ihrer Generation ist. Damit hätten wir

$$x < x_R < y < x_R + x < x_{RR} + x_R, \quad (62)$$

so dass sich y auch in der vorherigen Generation zwischen x_R und $x_{RR} + x_R$ schiebt. Das wiederholt sich solange, bis $G(y) = G(x_{R\dots})$ (spätestens bei $x_{R\dots} = 1$, in der Situation $1/2 < y < 1 + 1/2$), dann müssten, wegen (T8), diese beiden Zahlen gleich sein, und y wäre ebenfalls ein Null-Nachbar.

Dann käme y aber, zusätzlich zu $x + x = y$ aus (59), auch in seiner „eigenen“ Gleichung

$$(0 \mid y) + (0 \mid y) = y \quad (63)$$

vor, also $(0 \mid x_R) = x = (0 \mid y) \implies x_R = y$, und das steht im Widerspruch zur Annahme, dass $G(y) < G(x_R)$.

Als letzte noch unbekannte Zahl der vierten Generation bleibt jetzt $(1/2 \mid 1)$ übrig – wäre doch ein Wunder, wenn das nicht $3/4$ wäre...

Vielleicht hilft uns dabei die andere gerade gefundene Zahl $(0 \mid 1/2)$. Rechnen wir doch mal

$$\begin{aligned} 3/4 &= 1 - 1/4 = 1 + (-1/2 \mid 0) = (0 - 1/4, 1 - 1/2 \mid 1 + 0) \\ &= (-1/4, 1/2 \mid 1) = (1/2 \mid 1), \quad (64) \end{aligned}$$

genau wie erwartet.

Das lässt sich gewiss auf alle linken „Eins-Nachbarn“ verallgemeinern, die alle den Wert $1 - \frac{1}{2^{g-1}}$ haben dürften, aber diesen Beweis sparen wir uns an dieser Stelle.

Eine Formel für alles

Interessanter wäre ein Beweis, dass die surrealen Zahlen in allen Generationen weiterhin dem Schema folgen, das wir bisher beobachten konnten:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & 1 & & & \\ -2 & & & & & & & & & & & & & & \\ -3 & -3/2 & -3/4 & -1/2 & -1/4 & 1/4 & 3/4 & 3/2 & 2 & 3 \end{array}$$

Abgesehen von den äußersten Zahlen jeder Zeile, in denen eine der Vorgänger-Mengen leer ist, und die laut (Z) alles ganze Zahlen sind, besitzt hier jede Zahl $x = (x_L \mid x_R)$ den Wert

$$x = \frac{1}{2} (x_L + x_R). \quad (W)$$

Für die Null-Nachbarn ist das aus (NN) bereits bekannt. Die vollständige Behauptung für positives x ist dann

$$X_R = \emptyset \quad \text{oder} \quad x_L = 0 \quad \text{oder} \quad x + x = x_L + x_R, \quad (65)$$

und sie ist korrekt für die Generationen 1 bis 3. Ab hier führen wir wieder einen Induktionsbeweis und beginnen damit, die Summe aufzulösen,

$$\begin{aligned} x + x &= (x_L + x \mid x_R + x) \\ &= ((\dots \mid x_L + x_R, x_{LR} + x) \mid (x_{RL} + x, x_R + x_L \mid \dots)) \end{aligned}$$

Die mit „...“ angedeuteten Mengen werden wir nicht brauchen, sie dürfen gerne auch leer sein. Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $x_L + x_R$ an, weil es uns dann leichter fällt, die beiden Elemente in den Mengen zu vergleichen.

$$= ((\dots \mid x + x, x_{LR} + x) \mid (x_{RL} + x, x + x \mid \dots))$$

Hier dürfen wir uns gemäß (R) in der ersten (rechten) Menge für das kleinere Element und in der zweiten (linken) Menge für das größere Element entscheiden. Wir benutzen $x_{RL} < x < x_{LR}$ (was wir im Anschluss noch beweisen müssen), und ersetzen das Ergebnis, welches beides mal $x + x$ ist, wieder durch $x_L + x_R$.

$$= ((\dots \mid x_L + x_R) \mid (x_L + x_R \mid \dots))$$

Nun sind wir in exakt derselben Situation wie in (53), als wir gezeigt haben, dass $\langle \bullet : \mid \rangle + \langle \bullet : \mid \rangle = \mid$. Aus (T8") folgt das gewünschte Resultat

$$= x_L + x_R.$$

Es folgt der versprochene Nachweis, dass

$$x_{RL} < x < x_{LR}. \quad (66)$$

Angenommen, das wäre nicht so, also zum Beispiel $x < x_{RL} < x_R$ ($x = x_{RL}$ und $x_R \leq x_{RL}$ sind von vornherein ausgeschlossen) – ein Widerspruch zu (46) wonach x_R die kleinste Zahl $> x$ in allen früheren Generationen ist.

Gesetze der Addition

Nach ein paar einfachen Beispielen im Anschluss an die Definition (A) haben wir ja ziemlich bedenkenlos mit der Addition gearbeitet, wie wir es von den gewöhnlichen Zahlen gewohnt sind, ohne dies formell abzusichern. Das wollen wir nun nachholen. Hier nochmal die Definition:

$$x + y = ((X_L + y) \cup (Y_L + x) \mid (X_R + y) \cup (Y_R + x)), \quad (A)$$

Aus der Schule kennen wir drei Gesetze der Addition:

Das Kommutativgesetz

$$x + y = y + x \quad (T9)$$

folgt direkt aus der Definition, da die Vereinigung von Mengen kommutativ ist und alle Ausdrücke der Art $X_L + y$ letztlich auf die leere Menge zurückgeführt werden.

Nun zeigen wir, dass 0 das neutrale Element der Addition ist,

$$\begin{aligned} x + 0 &= ((X_L + 0) \cup (\emptyset + x) \mid (X_R + 0) \cup (\emptyset + x)) \\ &= (X_L + 0 \mid X_R + 0) = (X_L \mid X_R) = x, \end{aligned} \quad (T10)$$

wie gewohnt mittels vollständiger Induktion über $G(x)$, wozu wir nur noch den Induktionsanfang

$$0 + 0 = ((\emptyset + 0) \cup (\emptyset + 0) \mid (\emptyset + 0) \cup (\emptyset + 0)) = (\mid) = 0$$

benötigen.

Das Assoziativgesetz

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{T11})$$

ist vor allem viel Schreibarbeit.

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= ((X_L + y) + z) \cup ((Y_L + x) + z) \cup (Z_L + (x + y)) \mid \\ &\quad ((X_R + y) + z) \cup ((Y_R + x) + z) \cup (Z_R + (x + y))) \\ x + (y + z) &= ((x + (Y_L + z)) \cup (x + (Z_L + y)) \cup ((y + z) + X_L) \mid \\ &\quad (x + (Y_R + z)) \cup (x + (Z_R + y)) \cup ((y + z) + X_R)). \end{aligned}$$

Hierin treten, nachdem man einiges mit (T9) in die richtige Reihenfolge gebracht hat, wieder jede Menge Ausdrücke der Form $(a + b) + c$ auf, die gleich $(a + (b + c))$ sein sollten, was sich erneut per Induktion über $G(x, y, z)$ (vgl. (21)) beweisen lässt.

Eine Regel

$$x = y \quad \implies \quad x + z = y + z \quad (\text{T12})$$

klingt irgendwie selbstverständlich, aber wenn wir alles ausschließlich auf so abstrakte Definitionen wie (D1), (D2) und (A) aufbauen, ist gar nichts selbstverständlich. Jedenfalls folgt dies aus einer anderen, etwas allgemeineren Regel,

$$x \leq y \quad \implies \quad x + z \leq y + z. \quad (\text{T13})$$

Aus dieser ergibt sich durch zweimalige Anwendung auch

$$x \leq y \quad \text{und} \quad w \leq z \quad \implies \quad x + w \leq y + z. \quad (67)$$

Jetzt fehlt nur noch der Beweis für (T13), nach dem schon bekannten Vorgehen, möchte man meinen. Leider stellt sich die Sache als unheimlich vertrackt heraus und bei Knuth verteilt sich der Beweis auf etwa zwölf Seiten Text (mit viel Prosa zwischen den beiden Protagonisten)!

Der Knackpunkt ist, dass man nicht einmal sicher sein kann, dass $x + y$, so wie es in (A) definiert ist, eine Zahl nach (D1) ist. Es wäre ja möglich, dass $(x + y)_L \geq (x + y)_R$, und dann verschwindet die ganze schöne Theorie in einem finsternen Abgrund.

Das führt bei Knuth erst mal auf einen Ausflug ins Reich der Pseudo-Zahlen, die genauso aufgebaut sind wie die surrealen Zahlen, ohne die Forderung, dass $X_L \not\geq X_R$, und die trotzdem eine Menge Eigenschaften mit ihnen gemeinsam haben.¹ Solange der Status von $x + y$ unklar ist, darf man nur mit einer eingeschränkten Menge von Regeln arbeiten; diese genügen aber letztlich doch, um eine nicht ganz kleine Familie von gegenseitig voneinander abhängigen Aussagen² glücklich aus dem Abgrund zu ziehen, darunter eben auch (T13) und die umgekehrte Folgerung

$$x + z \leq y + z \quad \implies \quad x \leq y. \quad (\text{T14})$$

Damit ist dann alles wieder schön sauber.

Vorausgesetzt, die Regel (T13) wäre wahr – wir werden den Beweis im Anhang auf Seite 42 nachholen – können wir dann wenigstens beweisen, dass die Summe zweier Zahlen

$$x + y = (x + Y_L, y + X_L \mid x + Y_R, y + X_R)$$

wieder eine (wohlgeformte) Zahl ist? Dafür müssen wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} x + Y_L &< x + Y_R, \\ x + Y_L &< y + X_R, \\ y + X_L &< x + Y_R, \\ y + X_L &< y + X_R. \end{aligned}$$

¹Die Entität $\langle \bullet : \bullet \rangle$ in (2) war also eine Pseudo-Zahl.

²Nur eine Kostprobe: Damit $x + y$ eine Zahl ist, muss $Y_L + x < X_L + y$ sein, was wir aus (67) folgern könnten, also aus (T13), was korrekt ist, wenn $x + y$ eine Zahl ist. . .

Für die erste und die letzte Relation beziehen wir uns darauf dass x und y wohlgeformt sind, was uns $Y_L < Y_R$, bzw. $X_L < X_R$, liefert, und dies benutzen wir als Voraussetzung in (T13). Die anderen beiden Relationen folgen aus (67), da $X_L < x < X_R$ und $Y_L < y < Y_R$.

Es folgen weitere Regeln, die wieder vergleichsweise „normal“ sind.

$$x - x = x + (-x) = (X_L - X_R \mid X_R - X_L) = 0 \quad (\text{T15})$$

ist korrekt, da alle

$$x_L - x_R < 0 \iff (x_L - x_R) + x_R = x_L - 0 = x_L + 0 < x_R \quad (68)$$

(wir benutzen (T13), das Assoziativgesetz (T11), (T15) per Induktion, (N), (T10) und schließlich auch noch (D1)) und alle $x_R - x_L > 0$, so dass $x - x$ gemäß (T8) die früheste Zahl zwischen den negativen und den positiven Zahlen ist, also 0.

Für

$$-(-x) = x \quad (\text{T16})$$

braucht man nur die Definition des Negativen (N), und

$$(x + y) - y = x \quad (\text{T17})$$

zeigt man fast genauso wie (68), nur diesmal mit (T12) statt (T13).

$$-(x + y) = (-x) + (-y) \quad (\text{T18})$$

und

$$x \leq y \implies -y \leq -x \quad (\text{T19})$$

sind dann nur noch Formalitäten.

Binäre Zahlen

Zum Abschluss der vierten Generation hatten wir in (W),

$$x = \frac{1}{2} (x_L + x_R) \quad (69)$$

eine Formel gefunden, die uns erlaubt, den Wert jeder Zahl direkt aus den Werten ihrer Vorgängern zu bestimmen. Zusammen mit den ganzen Zahlen

$$n = (n - 1 \mid) \quad \text{und} \quad -n = (\mid n - 1) \quad (70)$$

können wir damit jeden Binärbruch³, d. h. jede Zahl

$$n.abcdef\dots \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a, b, c, d, e, f, \dots \in \{0, 1\} \quad (71)$$

bilden. Ähnlich wie im Dezimalsystem lässt sich so mit ausreichend vielen Nachkommastellen jede rationale und auch jede reelle Zahl beliebig genau annähern. Die Definition über kleinere linke und größere rechte Mengen erinnert auch stark an Dedekindsche Schnitte⁴. Unsere surrealen Zahlen sind also (mindestens) genauso mächtig wie die reellen Zahlen.

Für Zahlen, die keine exakten Binärbrüche sind, bedarf es natürlich *unendlicher* linker und rechter Mengen, das sollte aber kein Problem sein. Grundsätzlich kann man jede reelle Zahl x als

$$x = (\{x_L : x_L < x\} \mid \{x_R : x_R > x\}), \quad (72)$$

beschreiben, worin x_L und x_R endliche Binärbrüche sind, X_L und/oder X_R aber (meist) unendliche Mengen. Für $1/3$ ist das z. B.

$$\begin{aligned} 1/3 &= 0.010101\dots \\ &= (0, 0.01, 0.0101, 0.010101 \mid 1, 0.1, 0.011, 0.01011) \\ &= (0, 1/4, 5/16, 21/64, \dots \mid 1, 1/2, 3/8, 11/32, \dots) \end{aligned}$$

³https://de.wikipedia.org/wiki/Stellenwertsystem#Darstellung_rationaler_Zahlen

⁴https://de.wikipedia.org/wiki/Dedekindscher_Schnitt

und für $\pi = 3.14159\dots$

$$\begin{aligned}\pi &= 3.001001\dots \\ &= (3, 3.001, 3.001001, \dots \mid 4, 3.01, 3.00101, \dots) \\ &= (3, {}^{25}/_8, {}^{201}/_{64}, \dots \mid 4, {}^{13}/_4, {}^{101}/_{32}, \dots).\end{aligned}$$

Man braucht nur bei jedem Übergang $\dots 01\dots$ die Zahl $\dots 1 > x$ in der rechten Menge zu notieren, und bei jedem Übergang $\dots 10\dots$ die Zahl $\dots 1 < x$ in der linken Menge. (Wenn am Ende nur noch Nullen oder nur noch Einsen folgen, braucht man eine andere Regel, da so eine Zahl identisch einem *endlichen* Binärbruch ist.)

Unendliche Mengen

Wenn man aber schon unendliche Mengen zulässt, dann können auch seltsame Objekte entstehen, die *außerhalb* der reellen Zahlen liegen!

Was ist denn etwa die Zahl

$$\omega = (1, 2, 3, 4, \dots \mid) = (\mathbb{N} \mid) = (\mathbb{Z} \mid) = (\mathbb{R} \mid), \quad (73)$$

oder, wenn wir schon dabei sind,⁵

$$\varepsilon = (0 \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots) = (0 \mid \mathbb{B}_+^*) = (0 \mid \mathbb{Q}_+^*) = (0 \mid \mathbb{R}_+^*)? \quad (74)$$

Das eine ist größer als jede natürliche (oder reelle) Zahl und das andere ist kleiner als jede positive reelle Zahl, aber doch nicht Null.

Die infinitesimal kleinen Zahlen passen auch neben jede andere „normale“ reelle Zahl;⁶ wir können also ohne weiteres $1 + \varepsilon$ oder $\pi - \varepsilon$

⁵Mit $\mathbb{R}_+^*$ bezeichnen wir die positiven reellen Zahlen, $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; $\mathbb{Q}_+^*$ und $\mathbb{B}_+^*$ sind die positiven rationalen Zahlen und die positiven Binärbrüche.

⁶Man betrachte das Diagramm in https://de.wikipedia.org/wiki/Surreale_Zahl.

Unendliche Beweise

Wäre da nicht ein kleines Damoklesschwert, das unsere hoch fliegenden Träume zerplatzen lassen könnte. – Der Großteil unserer Beweise benutzt ja in der ein oder anderen Weise vollständige Induktion über eine Generationenzahl. Was sollen wir aber mit Zahlen anstellen, deren $G(x) = \omega$ ist, oder 2ω , ω^2 oder Schlimmeres?

Tatsächlich ist die Sache gar nicht so tragisch. Wir müssen ja nur von jeder *konkreten* Situation rückwärts bis zum Ursprung gehen können und diesem in jedem Schritt ein wenig näher kommen, ohne in Schleifen zu geraten oder endlos in derselben Generation umher zu irren. Das sind zwar unendlich viele Schritte, aber am Ursprung wartet die 0 (oder die leere Menge), und danach geht es nicht weiter.

Mehr verlangt die Induktion nicht.

Multiplizieren

Die Methode, nach der zwei surreale Zahlen zu addieren sind, war noch einigermaßen einsichtig – addiere die linken/rechten Mengen mit der jeweils anderen Zahl, das war's schon.

Multiplikation ist eine härtere Nuss. Die Definition von $z = xy$ kann man fast ein Ungetüm nennen: Die z_L und z_R , aus denen $(Z_L \mid Z_R)$ zusammensetzt ist, werden so gebildet, dass

$$\begin{aligned} z_L &= x_L y + x y_L - x_L y_L & \text{oder} & & z_L &= x_R y + x y_R - x_R y_R, \\ z_R &= x_L y + x y_R - x_L y_R & \text{oder} & & z_R &= x_R y + x y_L - x_R y_L. \end{aligned} \tag{M}$$

Man kombiniert also jedes Paar $\xi \in X_L \cup X_R$, $\eta \in Y_L \cup Y_R$ in der Form

$$\zeta = \xi y + \eta x - \xi \eta$$

und gibt das Ergebnis ζ in die linke Menge von z , wenn ξ und η beides linke oder beides rechte Zahlen waren; die Kombination einer linken und einer rechten Zahl geht in die rechte Menge von z .

Das macht schon Sinn. $\xi y + \eta x - \xi \eta \approx xy + xy - xy = xy$ und die Kombination von zwei kleineren, linken Zahlen oder zwei größeren, rechten Zahlen kann gut kleiner als xy sein, während eine gemischte Kombination größer sein könnte.

Man kann die Gleichungen in (M) auch umordnen, dann sieht man klarer,

$$xy > x_L y + x y_L - x_L y_L \iff 0 < xy - x_L y - x y_L + x_L y_L = (x - x_L)(y - y_L). \quad (80)$$

Aha, das ist der Schlüssel, und wenn wir auch noch die restlichen Kombinationen

$$\begin{aligned} xy > x_R y + x y_R - x_R y_R &\iff 0 < (x - x_R)(y - y_R) \\ xy < x_L y + x y_R - x_L y_R &\iff 0 > (x - x_L)(y - y_R) \\ xy < x_R y + x y_L - x_R y_L &\iff 0 > (x - x_R)(y - y_L) \end{aligned}$$

betrachten, so erkennen wir, dass xy eine wohlgeformte Zahl nach (D1) ist.

Gesetze der Multiplikation

Wie steht es mit den üblichen Gesetzen der Multiplikation, allen voran die Kommutativität?

$$xy = yx \quad (T20)$$

zeigt man rekursiv, indem man unter anderem $x_L y = y x_L$ benutzt, sowie die Kommutativität der Addition (T9).

$$0 \cdot x = 0 \quad (T21)$$

ist korrekt, da die 0 keine linken oder rechten Zahlen besitzt, die man mit x kombinieren könnte, also sind auch die linken und rechten Mengen des Produkts leer. Das gilt übrigens auch für unsere unendlichen Zahlen: $0 \cdot \omega = 0$, etc.

Die Multiplikation mit 1 ergibt

$$1 \cdot x = (0x + 1x_L - 0x_L \mid 0x + 1x_R - 0x_R) = (x_L \mid x_R) = x, \quad (\text{T22})$$

wieder per Induktion vorausgesetzt, dass $1x_L = x_L$ und $1x_R = x_R$.

Wenn wir mit dem Negativen einer Zahl multiplizieren, erhalten wir

$$(-x)y = (-X_R \mid -X_L)y = (-(xy)_R \mid -(xy)_L) = -(xy). \quad (\text{T23})$$

Die Hälfte einer Zahl ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= ((0x + \frac{1}{2}X_L - 0X_L) \cup (1x + \frac{1}{2}X_R - 1X_R) \mid \\ &\quad (0x + \frac{1}{2}X_R - 0X_R) \cup (1x + \frac{1}{2}X_L - 1X_L)) \\ &= (\frac{1}{2}X_L \cup (x - \frac{1}{2}X_R) \mid \frac{1}{2}X_R \cup (x - \frac{1}{2}X_L)). \end{aligned} \quad (\text{T24})$$

Angewandt auf $x = \omega$ ergibt das, da $\omega_R = \emptyset$,

$$\frac{1}{2}\omega = (\frac{1}{2}\mathbb{N} \mid \omega - \frac{1}{2}\mathbb{N}) = (\mathbb{N} \mid \omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \dots), \quad (81)$$

weil wir zwischen $\mathbb{N}$ und $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ keinen Unterschied machen müssen. Das heißt, $\frac{1}{2}\omega$ ist immer noch größer als jede natürliche Zahl aber kleiner als das, was man bekommt, wenn man irgendeine natürliche Zahl von ω abzieht. Oder nochmal anders ausgedrückt, $\frac{1}{2}\omega$ ist von 0 genauso weit entfernt wie von ω , was ja durchaus Sinn macht.

Können wir das auch verifizieren?

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega - 0 &= \omega - \frac{1}{2}\omega && \iff && \frac{1}{2}\omega = (1 - \frac{1}{2})\omega \\ &&& \iff && \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\omega \end{aligned}$$

Na, das war ja eher trivial, daraus haben wir nichts gelernt. Wir sollten besser nachrechnen, ob $\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega = \omega$,

$$\begin{aligned} (\mathbb{N} \mid \omega - \mathbb{N}) + (\mathbb{N} \mid \omega - \mathbb{N}) &= (\mathbb{N} + \frac{1}{2}\omega \mid \frac{1}{2}\omega + (\omega - \mathbb{N})) \\ &= (\mathbb{N} + \frac{1}{2}\omega \mid \frac{3}{2}\omega - \mathbb{N}), \end{aligned}$$

und das muss laut (T8) – wir erinnern uns – die Zahl in der frühesten Generation sein, die zwischen der linken und der rechten Seite liegt – das kann aber nichts anderes sein als ω , voila!

Jetzt können wir uns auch mit $\omega \cdot \varepsilon$ befassen – ich hatte ja vermutet, dass das $= 1$ sein sollte,

$$\omega \cdot \varepsilon = (\mathbb{N} \mid) \cdot (0 \mid \mathbb{Q}_+^*) = (\mathbb{N} \cdot \varepsilon \mid \mathbb{N} \cdot \varepsilon + \omega \cdot \mathbb{Q}_+^* - \mathbb{N} \cdot \mathbb{Q}_+^*). \quad (82)$$

Wir müssen also lediglich zeigen, dass

$$\mathbb{N} \cdot \varepsilon < 1 \quad \text{und} \quad 1 < \mathbb{N} \cdot \varepsilon + \omega \cdot \mathbb{Q}_+^* - \mathbb{N} \cdot \mathbb{Q}_+^*.$$

Die erste Relation folgt aus (79). In der zweiten müssen die $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{Q}_+^*$ jeweils einheitlich gewählt werden; was wir eigentlich schreiben sollten ist:

$$\begin{aligned} &1 < x\varepsilon + \omega y - xy, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+^* \\ \iff &1 < \frac{1}{2}\omega y < (\omega - x)y, \end{aligned}$$

da $x\varepsilon$ nicht ins Gewicht fällt und wegen (81), wo alle $\omega - x$ in der rechten Seite von $\frac{1}{2}\omega$ auftauchen.

Weitere wichtige Gesetze der Multiplikation sind das Distributivgesetz

$$x(y + z) = xy + xz \quad (\text{T25})$$

und das Assoziativgesetz

$$x(yz) = (xy)z. \quad (\text{T26})$$

Im vorherigen Abschnitt haben wir „erkannt“, dass xy eine wohlgeformte Zahl ist, mit der Begründung, dass das Produkt zweier positiver Zahlen $(x - x_L)(y - y_L)$ wieder positiv ist. Das klingt zwar logisch, bedarf aber auch noch eines Beweises,

$$x < y \quad \text{und} \quad z > 0 \quad \implies \quad xz < yz. \quad (83)$$

Was sonst noch?

Donald Knuth beendet seine Novelle mit einer kurzen Betrachtung, was die Multiplikation für Pseudo-Zahlen bedeutet, sowie einigen fortgeschrittenen Beispielen, in denen erstmals auch eine Division auftaucht – ohne dafür allerdings eine allgemeine Definition zu geben.

Vorausgesetzt, $0 < x < 1$, dann ist

$$1 - \frac{1}{1+x} = (x - x^2, x - x^2 + x^3 - x^4, \dots | x, x - x^2 + x^3, x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5, \dots). \quad (84)$$

Immerhin können wir die Probe rechnen. Multipliziert man den linken Ausdruck mit $1 + x$, erhält man $(1 + x) - 1 = x$, also sollte auch das Produkt von $1 + x$ mit der Zahl auf der rechten Seite, die wir y nennen wollen, x ergeben. Dem Produkt geben wir den Namen $z = (1 + x)y$.

Weil wir das gleich noch brauchen werden, berechnen wir als Erstes das Produkt von $1 + x$ mit den $y_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+1}$, die wir in den linken und rechten Mengen von y sehen – hier allerdings mit gewöhnlicher Mathematik.

$$\begin{aligned} (1+x)y_n &= (1+x) \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k x^{k+1} = x - (-1)^{n+1} x^{n+2}. \end{aligned}$$

In der linken Menge von y liegen die y_n mit ungeradem n , in der rechten diejenigen mit geradem n , also

$$(1+x)y_{Ln} = x - x^{n+2} < x, \quad (1+x)y_{Rn} = x + x^{n+2} > x,$$

so wie es sein soll. Nun ist, da x^{n+2} für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, x die einzige Zahl⁷, die zwischen die Mengen $\{(1+x)y_{Ln}\}$ und $\{(1+x)y_{Rn}\}$ passt; wir dürfen deshalb schreiben

$$x = ((1+x)Y_{Ln} \mid (1+x)Y_{Rn}).$$

Andererseits folgt, wegen $0 < y_{Ln} < y < y_{Rn}$ und $1+x > 0$, aus (83), dass

$$(1+x)y_{Ln} < (1+x)y = z < (1+x)y_{Rn}.$$

Es bleibt also nichts anderes übrig als der Schluss, dass $z = x$, q. e. d.

Wurzeln

Ausnehmend elegant sind auch die Formeln

$$\sqrt{\omega} = \left(1, 2, 3, 4, \dots \mid \frac{\omega}{1}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{4}, \dots\right), \quad (85)$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \left(\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \dots \mid \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right). \quad (86)$$

Knuth ist eben ein Künstler. :-)

Auch das wollen wir nachrechnen, zunächst für (85). Wir bezeichnen die rechte Seite wieder mit y und wollen prüfen, ob $y \cdot y = \omega$.

⁷Abgesehen von Ausdrücken wie $x+\varepsilon$, die wir aber nicht zu betrachten brauchen, da sie eine höhere Generationenzahl als x besitzen.

Aus (80) und den danach folgenden Gleichungen wissen wir, dass das Produkt y^2 durch die Relationen

$$\begin{aligned} 0 &< (y - k)(y - \ell), & 0 &< \left(y - \frac{\omega}{k}\right)\left(y - \frac{\omega}{\ell}\right), \\ 0 &> (y - k)\left(y - \frac{\omega}{\ell}\right), & 0 &> \left(y - \frac{\omega}{k}\right)(y - \ell), \end{aligned}$$

mit $k, \ell \in \mathbb{N}$, charakterisiert ist. Wenn wir darin $\sqrt{\omega}$ für y einsetzen, erhalten wir die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 &< (\sqrt{\omega} - k)(\sqrt{\omega} - \ell), & 0 &< \left(\sqrt{\omega} - \frac{\omega}{k}\right)\left(\sqrt{\omega} - \frac{\omega}{\ell}\right), \\ 0 &> (\sqrt{\omega} - k)\left(\sqrt{\omega} - \frac{\omega}{\ell}\right), & 0 &> \left(\sqrt{\omega} - \frac{\omega}{k}\right)(\sqrt{\omega} - \ell), \end{aligned}$$

welche alle offensichtlich wahr sind, da $n < \sqrt{\omega} < \omega/n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit demselben Argument wie im vorherigen Abschnitt schließen wir daraus, dass $y = \sqrt{\omega}$.

Für (86) betrachten wir in analoger Weise die Relationen

$$\begin{aligned} 0 &< (y - k\varepsilon)(y - \ell\varepsilon), & 0 &< \left(y - \frac{1}{k}\right)\left(y - \frac{1}{\ell}\right), \\ 0 &> (y - k\varepsilon)\left(y - \frac{1}{\ell}\right), & 0 &> \left(y - \frac{1}{k}\right)(y - \ell\varepsilon), \end{aligned}$$

in denen wir nun y durch $\sqrt{\varepsilon}$ ersetzen.

$$\begin{aligned} 0 &< (\sqrt{\varepsilon} - k\varepsilon)(\sqrt{\varepsilon} - \ell\varepsilon), & 0 &< \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{\ell}\right), \\ 0 &> (\sqrt{\varepsilon} - k\varepsilon)\left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{\ell}\right), & 0 &> \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{k}\right)(\sqrt{\varepsilon} - \ell\varepsilon) \end{aligned}$$

sind alle wahr, weil $n\varepsilon < \sqrt{\varepsilon} < 1/n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Anhang

Spiele und Pseudo-Zahlen

Als *Pseudo-Zahlen* bezeichnet Knuth solche Entitäten $(X_L | X_R)$, welche schon die erste Definition (D1) verletzen, in denen also $X_L \geq X_R$. Die Konsequenz ist, dass bei den Operationen Addition und Multiplikation erneut Pseudo-Zahlen entstehen.

Bei Conway heißen sie „Spiele“, und tatsächlich hatte er sich ursprünglich damit beschäftigt, einen Formalismus zu finden, mit dem man Brettspiele, insbesondere Go, analysieren könnte.⁸ Eine bestimmte Stellung in so einem Spiel hat dann die Form $(L | R)$, wobei L die Stellungen sind, die der linke Spieler mit einem zulässigen Zug erreichen kann, und R die Stellungen, die der rechte Spieler erreichen kann. Ist die Menge des Spielers, der am Zug ist, leer, dann hat er das Spiel verloren. Somit ist

- jede Zahl $(\emptyset | R) < 0$ eine Verlust-Stellung für den linken Spieler (weil er nicht mehr ziehen kann, sein Gegner aber schon);
- jede Zahl $(L | \emptyset) > 0$ ist eine Verlust-Stellung für den rechten Spieler;
- bei der Zahl $(|) = 0$ hat der Spieler verloren, der gerade am Zug ist;
- wohingegen in einer Stellung mit dem Wert $(0 | 0)$ der nächste Spieler gewonnen hat, da nach seinem Zug der Gegenspieler mit der Null konfrontiert ist.

⁸Nicht alle Spiele eignen sich dafür. Es braucht zwei Spieler, die abwechselnd ziehen, der Zufall darf keine Rolle spielen, es darf keine geheimen Informationen geben, und die Spiel-Stellungen sollten sich nicht wiederholen können.

Die $<$ und $>$ Relationen drücken aus, ob eine gewisse Stellung günstiger oder ungünstiger für einen der Spieler ist. Deshalb wird der linke Spieler aus L eine möglichst große Zahl wählen (bzw. ein Spiel, das $\not\leq$ allen anderen Spielen in L ist, der rechte Spieler dagegen ein möglichst kleines Spiel.

Sobald ein Spieler eine Stellung erreicht hat, deren Wert echt größer (bzw. echt kleiner) Null ist, wird er das Spiel – vorausgesetzt er wählt ab da an immer den besten Zug – sicher gewinnen. Interessant sind also vor allem die anderen Spiele, die weder größer noch kleiner als Null sind, z. B. $z = (2 \mid -1)$.

$$\begin{aligned} z \leq 0 &\iff 2 \not\leq 0 \text{ und } z \not\leq \emptyset \iff \text{falsch,} \\ 0 \leq z &\iff \emptyset \not\leq z \text{ und } 0 \not\leq -1 \iff \text{falsch.} \end{aligned}$$

Man kann nachweisen, dass solche „unklaren“ Spiele von dem Spieler gewonnen werden, der am Zug ist.⁹

Spiele zu addieren macht auch Sinn, nämlich dann, wenn es abgeschlossene Teil-Stellungen gibt, die sich gegenseitig nicht beeinflussen, und wo der Spieler am Zug wählen kann, in welchem Teil er einen Zug macht. Gerade im Endspiel von Go gibt es stets solche separaten Gebiete. Dabei kann es sogar vorkommen, dass zwei Stellungen, die – einzeln betrachtet – vom einen Spieler gewonnen würden, in der Summe aber einen Vorteil für den anderen Spieler darstellen!

⁹Weil in seiner Menge entweder eine echte Zahl ist, die ihm zum Vorteil gelangt oder ein Spiel mit Wert Null oder besser. Zum Beispiel kann man nachrechnen, dass $((0 \mid 0) \mid (0 \mid 0)) = 0$.

Die vertrackte Addition

Im Abschnitt über die Gesetze der Addition auf Seite 28 war ich noch einen wichtigen Beweis schuldig geblieben, nämlich für die Regel

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z, \quad (\text{T13})$$

die man u. a. für den Nachweis benötigt, dass die in (A) definierte Summe eine wohlgeformte Zahl gemäß (D1) ist. Das wollen wir hier nachholen, wobei wir aber nur solche Regeln benutzen dürfen, die auch für Pseudo-Zahlen gelten.¹⁰

Zuerst verallgemeinern wir diese Regel ein wenig zu

$$x \leq x' \wedge y \leq y' \implies x + y \leq x' + y', \quad (87)$$

(vgl. (67)), nehmen dazu noch

$$x + y \geq x' + y' \wedge y \leq y' \implies x \geq x', \quad (88)$$

(was sich leicht von (T14) unterscheidet und hier besser anzuwenden ist), und kürzen beides in Form zweier boolescher Ausdrücke

$$p(x, x', y, y') \iff (87), \quad q(x, x', y, y') \iff (88)$$

ab. Unser Ziel ist, die Wahrheit dieser beiden Aussagen für beliebige Entitäten, seien es wohlgeformte Zahlen oder Pseudo-Zahlen, zu beweisen. Und der Weg führt wie üblich per Induktion, indem wir uns auf gleichartige Ausdrücke stützen, in denen einzelne Zahlen durch ihre Vorgänger-Mengen ersetzt sind, bis hin zu einem Ausdruck, in dem eines der vier Argumente die leere Menge $\emptyset$ ist, z. B. $x' = \emptyset$.

¹⁰Bei diesem Beweis orientiere ich mich an dem Aufsatz *Surreal Numbers – An Introduction*, <http://www.tondering.dk/download/sur16.pdf>, von Claus Tøndering, da mir dieser einfacher als der bei Knuth erscheint.

$$\begin{aligned}
p(x, \emptyset, y, y') &\iff (x \leq \emptyset \wedge y \leq y' \implies x + y \leq \emptyset + y' = \emptyset) \\
&\iff (\text{wahr} \wedge y \leq y' \implies \text{wahr}) \quad \text{und} \\
q(x, \emptyset, y, y') &\iff (x + y \geq \emptyset + y' = \emptyset \wedge y \leq y' \implies x \geq \emptyset) \\
&\iff (\text{wahr} \wedge y \leq y' \implies \text{wahr}) \quad (89)
\end{aligned}$$

sind dann trivialerweise wahr, ebenso wie alle anderen Varianten.

Beginnen wir nun den Beweis mit der in Aussage (87) getroffenen Schlussfolgerung $x + y \leq x' + y'$, also

$$\begin{aligned}
(x + Y_L, X_L + y \mid x + Y_R, X_R + y) \\
\leq (x' + Y'_L, X'_L + y' \mid x' + Y'_R, X'_R + y').
\end{aligned}$$

Das ist wahr, wenn die vier Aussagen

$$x + Y_L \not\geq x' + y', \quad (90)$$

$$X_L + y \not\geq x' + y', \quad (91)$$

$$x + y \not\geq x' + Y'_R, \quad (92)$$

$$x + y \not\geq X'_R + y' \quad (93)$$

alle wahr sind.

Angenommen, (90) wäre falsch, also $Y_L + x \geq y' + x'$; das wäre dann der erste Teil der linken Seite in (88),¹¹ wozu wir noch das in (87) vorausgesetzte $x \leq x'$ nehmen. Damit ist die linke Seite komplett und wir können aus (88) folgern, dass $Y_L \geq y'$. Das kann aber nicht sein, da laut der anderen Voraussetzung in (87) $Y_L < y \leq y'$, also ist die Annahme falsch und somit (90) wahr.

¹¹In diesem Induktionsbeweis dürfen wir die Korrektheit von (87) und (88) voraussetzen, *wenn* darin Ausdrücke früherer Generationen vorkommen, hier z. B. Y_L .

Die Beweise für (91) bis (93) gestalten sich sehr ähnlich, wir brauchen nur jedesmal eine andere Variante von q . Insgesamt erhalten wir

$$p(x, x', y, y') \iff q(Y_L, y', x, x') \wedge q(X_L, x', y, y') \\ \wedge q(y, Y_R, x, x') \wedge q(x, X_R, y, y'). \quad (94)$$

Das heißt, wir sollten uns jetzt um die Aussage (88) kümmern, die wir schnell nochmal wiederholen:

$$x + y \geq x' + y' \wedge y \leq y' \implies x \geq x'. \quad (88)$$

Diesmal setzen wir voraus, dass beide Teile der linken Seite wahr sind, nehmen aber an, dass $x \not\geq x'$. Dazu wäre notwendig, dass

$$x \leq x'_L \quad \text{oder} \quad x_R \leq x',$$

für ein gewisses $x'_L \in X'_L$ bzw. $x_R \in X_R$.

Zusammen mit der Voraussetzung $y \leq y'$ können wir darauf (87) anwenden und erhalten¹²

$$x \leq x'_L \wedge y \leq y' \implies x + y \leq x'_L + y' < x' + y' \\ x_R \leq x' \wedge y \leq y' \implies x + y < x_R + y \leq x' + y'$$

Wir hatten aber gerade vorausgesetzt, dass $x + y \geq x' + y'$, so dass die Annahme $x \not\geq x'$ falsch sein muss.

Somit können wir also

$$q(x, x', y, y') \iff p(x, x'_L, y, y') \wedge p(x_R, x', y, y') \quad (95)$$

ableiten, so dass sich die Prädikate p und q in der gewünschten Weise gegenseitig stützen und der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

¹²Streng genommen sollten wir nicht mit $x + y < x_R + y$ arbeiten, sondern die Definition von $x + y \geq x' + y'$ auflösen und in einer der vier Relationen den Widerspruch finden.